Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Wslk = Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Vierfeldertafel

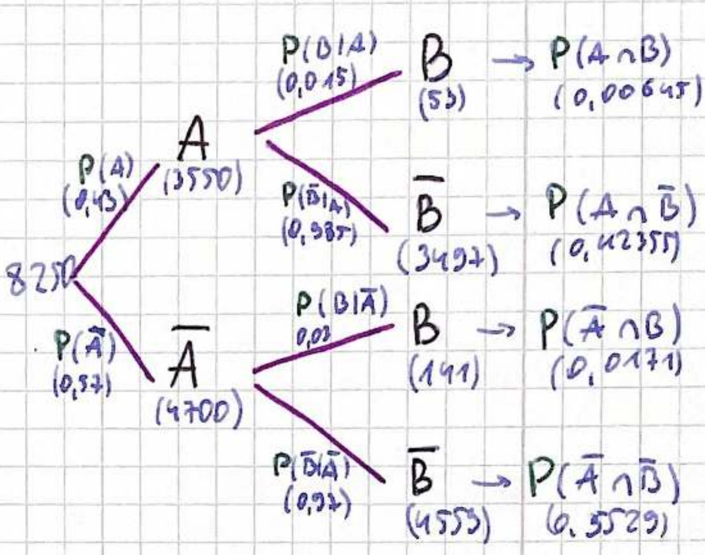
absolut

	B	$\overline{B}$	ges.
A	53	3497	3550
$\overline{A}$	141	4559	4700
ges.	194	8056	8250

relativ

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Baumdiagramm



bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = P(B \text{ wenn } A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

stochastisch unabhängig

$\boxed{P(B|A) = P(B)}$

ziehen mit Zurücklegen

$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$

stochastisch abhängig

→ nicht unbedingt kausale Abhängigkeit
→ kann auch indirekter Zusammenhang oder versteckte Variablen sein

$\boxed{P(B|A) \neq P(B)}$

ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$$

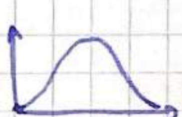
$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

BRUNNEN

Zufallsgröße X:
reele Zahl, die einem Ergebnis des Zufallsexperiments zugeordnet wird. z.B.: drei Münzen geworfen
⇒ X = Anzahl von „Kopf"

Zufallsgrößen

	diskret	stetig
Bereich →	$\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}$
repräsentieren →	Anzahlen	Messungen
Wslks-verteilung →	Binomialverteilung	Normalverteilung
Darstellung →	Histogramm	Dichte-Funktion



Wichtige Werte

Erwartungswert $\boxed{\mu}$ (mean)
→ hier pendelt sich die Zufallsgröße im Mittel ein

$$\mu(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Standardabweichung $\boxed{\sigma}$ (standard deviation)
→ Maß der Streuung der Zufallsgröße um μ

$$\sigma(X) = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (x_2-\mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n-\mu)^2 \cdot p_n}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot p_i}$$

Varianz $\boxed{\sigma^2}$ (variance)

Wslk-rechnung II

Bernoulli-Experiment: Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Treffer u. Fehlschlag)
$=\boxed{T}$ $=\boxed{F}$

Bernoulli-Kette (der Länge n): Kette von Zufallsexperimenten, wo

- jedes Experiment ist Bernoulli-Experiment
- p bei jedem Versuch gleich
- stochastisch unabhängig
- Anzahl der Experimente ist n

Die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette beschreiben wir mithilfe der Binomialverteilung

Binomialverteilung

- Bernoulli-Kette der Länge n
- Wslk Treffer: $\boxed{p}$
- Wslk Fehlschlag: $\boxed{1-p}$

• #Pfade mit k Treffern:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$ → Binomialkoeffizient

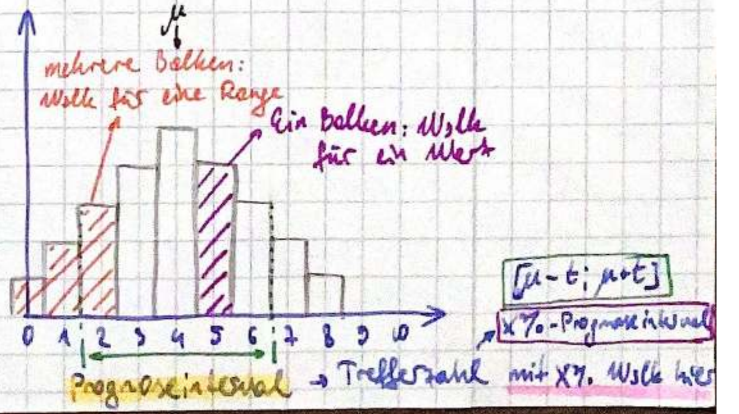
• Wslk für einen Pfad mit k Treffern:

$$\boxed{\underbrace{p^k}_{\text{Treffer}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Fehlschläge}}}$$

• Wslk für k Treffer:

$$\boxed{P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\#\text{Pfade}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Wslk ein Pfad}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mu &= n \cdot p \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}}$$

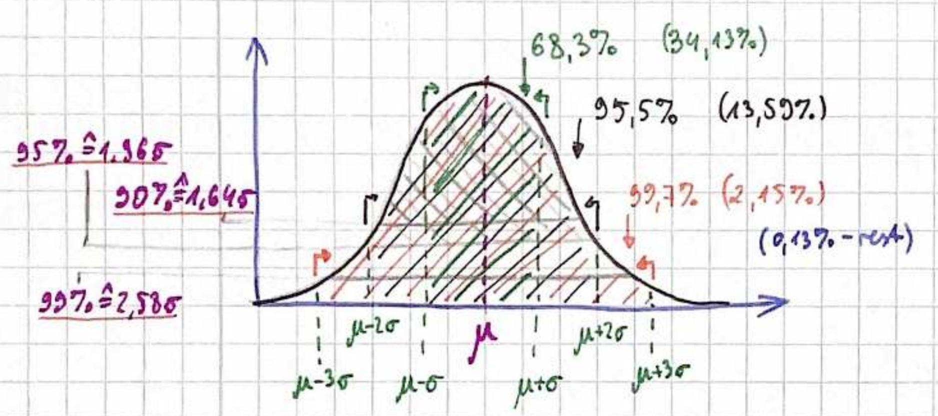


Normalverteilung

$$\boxed{\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

- Fläche unter der Kurve ist 1
- $\boxed{\mu}$ ist Maximum
- $\boxed{\sigma}$ ist Abstand Maximum – Wendepunkt
- Fläche in einem Bereich entspricht Wslk für diesen Bereich
- Wslk für einzelnen Wert ist 0
- ist auch Approximation für Binomialverteilung (für $\sigma > 3$)

→ auch σ-Regeln können angewandt werden (Runden → ⟶)



Berechnungen

<table>
<tr><th>mathematisch</th><th>Erklärung</th><th>GTR Binom.-Vert.</th><th>Nr.</th><th>GTR Norm.-Vert.</th><th>Nr.</th></tr>
<tr><td>$P(X=k)$</td><td>genau k</td><td>binompdf(n,p,k)</td><td>5 5 A</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$P(X\leq k)$</td><td>höchstens k</td><td>binomcdf(n,p,-∞,k)</td><td rowspan="5">5 5 B</td><td rowspan="2">normcdf(-∞,k,μ,σ)</td><td rowspan="5">5 5 2</td></tr>
<tr><td>$P(X<k)$</td><td>weniger als k</td><td>binomcdf(n,p,-∞,k-1)</td></tr>
<tr><td>$P(X\geq k)$</td><td>mindestens k</td><td>binomcdf(n,p,k,∞)</td><td rowspan="2">normcdf(k,∞,μ,σ)</td></tr>
<tr><td>$P(X>k)$</td><td>mehr als k</td><td>binomcdf(n,p,k+1,∞)</td></tr>
<tr><td>$P(k_1\leq X\leq k_2)$</td><td>mindestens k_1 u. höchstens k_2</td><td>binomcdf(n,p,k_1,k_2)</td><td>normcdf(k_1,k_2,μ,σ)</td></tr>
</table>